



University of the Pacific
Scholarly Commons

Euler Archive - All Works

Euler Archive

1784

Nova methodus integrandi formulas differentiales rationales sine subsidio quantitatum imaginariarum

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>



Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

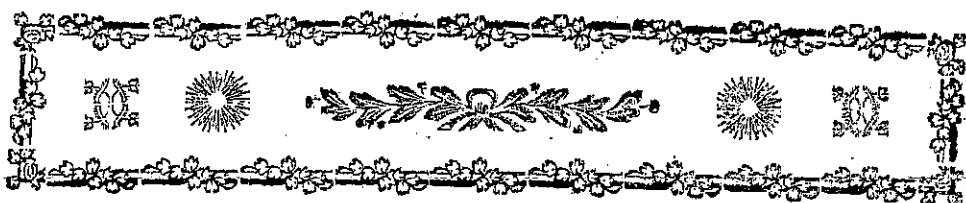
Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Nova methodus integrandi formulas differentiales rationales sine subsidio quantitatum imaginariarum" (1784).

Euler Archive - All Works. 572.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/572>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.



NOVA METHODVS INTEGRANDI FORMVLAS DIFFERENTIALES RATIONALES

SINE
SVBSIDIO QVANTITATVM
IMAGINARIARVM.

Auctore
L. EULER O.

Theorema I.

§. I. Si fuerit $xx - 2x \cos. \omega + 1 = 0$, tum
omnes potestates ipsius x reduci poterunt ad formam simpli-
cem $\alpha x + \beta$.

Demonstratio.

Cum sit $xx - 2x \cos. \omega + 1 = 0$, erit

$$x^{\lambda+2} = 2x^{\lambda+1} \cos. \omega - x^{\lambda},$$

vnde si potestates x^{λ} et $x^{\lambda+1}$ ad formam praescriptam

A 2

αx

$\alpha x + \beta$ redigi queant, tum etiam potestas $x^{\lambda + 1}$ per eandem formam exprimi poterit. Incipiamus igitur a potestatibus infimis, quas ita exhibeamus:

$$x = \frac{x \sin. \omega}{\sin. \omega} \text{ et } x x = \frac{2 x \sin. \omega \cos. \omega - \sin. \omega}{\sin. \omega} = \frac{x \sin. 2 \omega - \sin. \omega}{\sin. \omega}$$

His igitur constitutis, cum sit

$$2 \cos. \omega \sin. \lambda \omega = \sin. (\lambda + 1) \omega + \sin. (\lambda - 1) \omega,$$

ex his duabus formulis facile eliciemus sequentes:

$$x^3 = 2 x x \cos. \omega - x = \frac{x \sin. 3 \omega - \sin. 2 \omega}{\sin. \omega}$$

$$x^4 = 2 x^3 \cos. \omega - x x = \frac{x \sin. 4 \omega - \sin. 3 \omega}{\sin. \omega},$$

hocque modo quousque libuerit progredi licet; atque hinc in genere concludimus fore

$$x^n = \frac{x \sin. n \omega - \sin. (n - 1) \omega}{\sin. \omega},$$

quae ergo expressio formam habet $\alpha x + \beta$.

Corollarium 1.

§. 2. Cum sit

$$\sin. (n - 1) \omega = \sin. n \omega \cos. \omega - \cos. n \omega \sin. \omega,$$

hoc valore substituto fiet

$$x^n = \frac{x - \cos. \omega}{\sin. \omega} \sin. n \omega + \cos. n \omega;$$

quamobrem si fuerit $x x - 2 x \cos. \omega + 1 = 0$, pro omnibus potestatibus ipsius x habebimus hanc reductionem:

$$x^n = \frac{x - \cos. \omega}{\sin. \omega} \sin. n \omega + \cos. n \omega,$$

qua forma deinceps potissimum utemur.

Corollarium 2.

§. 3. Hinc igitur erit:

$$x^{k+n} = \frac{x - \cos \omega}{\sin \omega} \sin. (k+n) \omega + \cos. (k+n) \omega \text{ et}$$

$$x^{k-n} = \frac{x - \cos \omega}{\sin \omega} \sin. (k-n) \omega + \cos. (k-n) \omega,$$

quare his formulis addendis, ob

$$\sin. (k+n) \omega + \sin. (k-n) \omega = 2 \sin. k \omega \cos. n \omega \text{ et}$$

$$\cos. (k+n) \omega + \cos. (k-n) \omega = 2 \cos. k \omega \cos. n \omega$$

fiet

$$x^{k+n} + x^{k-n} = \frac{2(x - \cos \omega)}{\sin \omega} \sin. k \omega \cos. n \omega + 2 \cos. k \omega \cos. n \omega$$

sive

$$x^{k+n} + x^{k-n} = 2 \cos. n \omega \left(\left(\frac{x - \cos \omega}{\sin \omega} \right) \sin. k \omega + \cos. k \omega \right).$$

Corollarium 3.

§. 4. Sin autem potestatem posteriorem a priore subtrahamus, ob

$$\sin. (k+n) \omega - \sin. (k-n) \omega = 2 \cos. k \omega \sin. n \omega \text{ et}$$

$$\cos. (k+n) \omega - \cos. (k-n) \omega = -2 \sin. k \omega \sin. n \omega,$$

habebimus

$$x^{k+n} - x^{k-n} = \frac{2(x - \cos \omega)}{\sin \omega} \cos. k \omega \sin. n \omega - 2 \sin. k \omega \sin. n \omega. \text{ h. c.}$$

$$x^{k+n} - x^{k-n} = 2 \sin. n \omega \left(\left(\frac{x - \cos \omega}{\sin \omega} \right) \cos. k \omega - \sin. k \omega \right).$$

Corollarium 4.

§. 5. Etiamfi nostra demonstratio tantum ad potestates integras ipsius x perduxit, tamen ex indole harum formarum facile intelligitur, eas etiam pro exponentibus fractis, vel adeo irrationalibus, locum habere, quandoquidem in ipsis his formulis nihil inest, quod tantum ad valores integros exponentis n restringatur; tum vero etiam nihil impedit, quominus exponenti n valores nega-

riui tribuantur. Si enim v. g. sumamus $n = \frac{1}{2}$, per formulam Coroll. I. esse debet

$$\sqrt{x} = \frac{x - \cos. \omega}{\sin. \omega} \sin. \frac{1}{2} \omega + \cos. \frac{1}{2} \omega,$$

vnde sumtis quadratis, ob

$$(x - \cos. \omega)^2 = x x - 2 x \cos. \omega + \cos. \omega^2 = - \sin. \omega^2,$$

habebimus

$$x = - \sin. \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{2(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} \sin. \frac{1}{2} \omega \cos. \frac{1}{2} \omega + \cos. \frac{1}{2} \omega^2,$$

quae forma, ob

$$2 \sin. \frac{1}{2} \omega \cos. \frac{1}{2} \omega = \sin. \omega \text{ et } \cos. \frac{1}{2} \omega^2 - \sin. \frac{1}{2} \omega^2 = \cos. \omega,$$

abit in $x = x$, h. e. aequationem identicam.

Scholion.

§. 6. Formulae quas hic sumus adepti egregie conueniunt cum iis, quas calculus imaginariorum sup-
peditat. Cum enim aequatio $x x - 2 x \cos. \omega + 1 = 0$
contineat has radices: $x = \cos. \omega \pm \sin. \omega \sqrt{-1}$, erit, vti
in analysi est ostensum, $x^n = \cos. n \omega \pm \sin. n \omega \sqrt{-1}$;
quare cum sit

$$x^n - \cos. n \omega = \pm \sin. n \omega \sqrt{-1} \text{ et}$$

$$x - \cos. \omega = \pm \sin. \omega \sqrt{-1},$$

illa forma per hanc diuisa dabit

$$\frac{x^n - \cos. n \omega}{x - \cos. \omega} = \frac{\sin. n \omega}{\sin. \omega},$$

vnde sequitur fore

$$x^n - \cos. n \omega = \frac{x - \cos. \omega}{\sin. \omega} \sin. n \omega,$$

prorsus vti in Coroll. I. inuenimus. Ceterum nostrum
Theorema generalius proponi et ad aequationem

x x

$$x x - 2 a x \cos. \omega + a a$$

extendi potuisset; tum enim prodierat

$$\frac{x^n = a^{n-1} x \text{ fin. } n \omega - a^n \text{ fin. } (n-1) \omega}{\text{fin. } \omega},$$

deinde etiam

$$x^n = \frac{a^{n-1}(x - a \cos \omega)}{\sin \omega} \sin n\omega + a^n \cos n\omega,$$

quae formulae a prioribus non discrepant, nisi quod hic littera a homogeneitatem dimensionum expleat. Hae scilicet formulae ex illis immediate sequuntur, si ibi loco x scribatur $\frac{x}{a}$; sed breuitati et concinnitati consulentes eiusmodi tantum casus evoluemus, in quibus pro a commodè unitatem scribere liceat.

Theorema II.

§. 7. Si fuerit $xx - 2x \cos. \omega + 1 = 0$, omnes functiones rationales integrae, quaecunque potestates ipsius x in iis occurrant, semper reduci possunt ad hanc formam simplicem $\alpha x + \beta$.

Demonstratio.

Si functio proposita iam penitus fuerit euoluta, ita ut nullos factores complectatur, tum ea ope reductionis $x^n = \frac{x - \cos. \omega}{\sin. \omega} \sin. n \omega + \cos. n \omega$ sponte redigitur ad talem formam: $\frac{F(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} + G$. Verum si functio proposita duobus constet factoribus, veluti Pp , ac per istam reductionem prodierit

$$P = \frac{F(x - \cos \omega)}{\sin \omega} + G \text{ et } p = \frac{f(x - \cos \omega)}{\sin \omega} + g,$$

turn

tum facta multiplicatione, ob $(x - \cos. \omega)^2 = -\sin. \omega^2 \cos.$ ligitur fore

$$Pp = -Ff + Gg + \frac{(Fg + fG)(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega},$$

quod ergo productum eiusdem est formae; vnde simul patet, quocunque eiusmodi dentur factores, eorum productum semper ad eandem formam reduci posse.

Corollarium 1.

§. 8. Quodsi hoc modo prodierit

$$P = \frac{F(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} + G,$$

tum erit

$$P(x - \cos. \omega) = -F \sin. \omega + G(x - \cos. \omega),$$

quae expressio ideo est notatu digna, quod in sequentibus integrationibus vbique occurret.

Corollarium 2.

§. 9. Si functio P factorem habuerit

$$xx - 2x \cos. \omega + 1,$$

tum posito, vti assumimus,

$$xx - 2x \cos. \omega + 1 = 0,$$

valor ipsius P etiam evanescere debet. Hoc ergo casu formula $\frac{F(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} + G$ fiet $= 0$, id quod, ob x quantitatem indefinitam, aliter euenire nequit, nisi fuerit et $F = 0$ et $G = 0$. Atque hinc vicissim, si facta reductione prodeat $P = 0$, hoc certum erit signum, ipsam functionem inuolvere factorem $xx - 2x \cos. \omega + 1$.

Theo-

Theorema III.

§. 10. Si fuerit $xx - 2x \cos. \omega + 1 = 0$, tum etiam omnes functiones fractae rationales semper ad formam simplicem $\alpha x + \beta$ reduci possunt.

Demonstratio.

Sit enim proposita functio quaecunque fractio $\frac{P}{p}$, atque adhibita nostra reductione prodierit

$$P = \frac{F(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} + G \text{ et } p = \frac{f(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} + g,$$

ita ut peruenerimus ad hanc fractionem:

$$\frac{P}{p} = \frac{\frac{F(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} + G}{\frac{f(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} + g}.$$

Nam ut ipsam litteram x ex denominatore expellamus, multiplicemus tam numeratorem quam denominatorem per formulam $\frac{f(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} - g$; sic enim, ob

$$(x - \cos. \omega)^2 = -\sin. \omega^2,$$

pro denominatore reperiemus: $-ff - gg$; at vero pro numeratore:

$$-Ff + \frac{(fG - Fg)(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} - Gg,$$

unde mutatis signis forma nostrae fractionis erit

$$\frac{P}{p} = \frac{\frac{(Fg - fG)(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} + Ff + Gg}{ff + gg},$$

sive concinnius:

$$\frac{P}{p} = \frac{Fg - fG}{ff + gg} \cdot \frac{x - \cos. \omega}{\sin. \omega} + \frac{Ff + Gg}{ff + gg}.$$

Problema.

§. 11. *Proposita formula differentiali rationali quacunque, eam in suas fractiones partiales resolvere, ac deinceps eius integrale inuestigare.*

Solutio.

Repraesentetur formula differentialis sub hac specie:
 $\frac{P}{Q} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{P dx}{Q x}$, ita tamen, vt $\frac{P}{x}$ maneat functio integra, ne x sit factor denominatoris. Ante omnia quaerantur igitur ipsius Q omnes factores tam simplices quam duplices reales; et quia simplices nulla laborant difficultate, hic tantum duplices sum contemplaturus, quorum forma sit $xx - 2x \cos. \omega + 1$, ita vt, posito $xx - 2x \cos. \omega + 1 = 0$, quantitas Q simul in nihilum abeat, ex qua conditione omnes valores anguli ω elici poterunt, ita vt hoc modo omnes factores denominatoris Q obtineantur. Nunc igitur fractionem $\frac{P}{Qx}$ in totidem fractiones partiales resolui oportet, quot inuenti fuerint factores formae

$$xx - 2x \cos. \omega + 1.$$

Sit igitur in genere fractio partialis ex isto factore nata $= \frac{\alpha x + \beta}{xx - 2x \cos. \omega + 1}$, quandoquidem nouimus, eius numeratorem talem formam: $\alpha x + \beta$ habere debere; pro reliquis autem fractionibus partialibus omnibus scribamus litteram R , ita vt esse debeat

$$\frac{P}{Qx} = \frac{\alpha x + \beta}{xx - 2x \cos. \omega + 1} + R,$$

et multiplicando per $xx - 2x \cos. \omega + 1$ habebimus:

$$\frac{P (xx - 2x \cos. \omega + 1)}{Qx} = \alpha x + \beta + R (xx - 2x \cos. \omega + 1).$$

Quodsi ergo iam faciamus $xx - 2x \cos. \omega + 1 = 0$, erit

αx

$$\alpha x + \beta = \frac{P(x x - 2 x \cos. \omega + 1)}{Q x} = \frac{P}{x} \cdot \frac{x x - 2 x \cos. \omega + 1}{Q}$$

vbi in priore factore $\frac{P}{x}$ ista substitutio nullam habet difficultatem; verum in altera fractione $\frac{x x - 2 x \cos. \omega + 1}{Q}$, quia, posito $x x - 2 x \cos. \omega + 1 = 0$, non solum numerator sed etiam denominator Q evanescit, secundum praecepta cognita vtriusque loco eius differentiale scribamus, siquidem hoc casu fieri debet

$$\frac{x x - 2 x \cos. \omega + 1}{Q} = \frac{2 d x (x - \cos. \omega)}{d Q}$$

sicque obtinebitur numerator quaesitus

$$\alpha x + \beta = \frac{2 P d x (x - \cos. \omega)}{x d Q}$$

Ponamus igitur per hanc substitutionem fieri

$$P = \frac{F(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} + G \text{ et } \frac{x d Q}{d x} = \frac{f(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} + g,$$

ita ut sit

$$\frac{P d x}{x d Q} = \frac{\frac{F(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} + G}{\frac{f(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} + g},$$

quae forma per Theorema tertium reducitur ad hanc:

$$\frac{P d x}{x d Q} = \frac{F g - f G}{f f + g g} \cdot \frac{x - \cos. \omega}{\sin. \omega} + \frac{F f + G g}{f f + g g},$$

quae ergo insuper per $2(x - \cos. \omega)$ multiplicata, ob

$$(x - \cos. \omega)^2 = -\sin. \omega^2,$$

praebet numeratorem quaesitum:

$$\alpha x + \beta = \frac{2(F f + G g)(x - \cos. \omega)}{f f + g g} + \frac{2(f G - F g)}{f f + g g} \sin. \omega.$$

Multiplicetur igitur ista forma per $\frac{d x}{x x - 2 x \cos. \omega + 1}$, atque obtinebitur pars integralis ex hac fractione partiali oriunda:

$$\frac{2(F f + G g)}{f f + g g} \int \frac{d x (x - \cos. \omega)}{x x - 2 x \cos. \omega + 1} + \frac{f G - F g}{f f + g g} \sin. \omega \int \frac{d x}{x x - 2 x \cos. \omega + 1}.$$

Hic igitur pro priore parte manifesto est

$$\int \frac{dx (x - \cos \omega)}{xx - 2x \cos \omega + 1} = l\sqrt{xx - 2x \cos \omega + 1},$$

quod integrale iam ita est sumtum, vt euanescat posito $x = 0$; pro altero autem membro facile reperitur:

$$\int \frac{dx \sin \omega}{1 - 2x \cos \omega + x^2} = A \operatorname{tang.} \frac{x \sin \omega}{1 - x \cos \omega},$$

quod itidem euanescit posito $x = 0$, quocirca pars integralis, ex denominatoris Q factore $xx - 2x \cos \omega + 1$ orta erit

$$\frac{2(Ff + Gg)}{ff + gg} l\sqrt{xx - 2x \cos \omega + 1} + \frac{2(fG - Fg)}{ff + gg} A \operatorname{tang.} \frac{x \sin \omega}{1 - x \cos \omega}.$$

Corollarium 1.

§. 12. Duo autem casus hic singularem euolutionem postulant: alter; quo $\omega = 0$, alter vero quo $\omega = 180^\circ$; priore enim casu denominator $xx - 2x \cos \omega + 1$ abit in $(x - 1)^2$, posteriore vero in $(x + 1)^2$. Cum autem hinc plus concludere non liceat, quam vel $1 - x$ vel $1 + x$ esse factorem denominatoris, his casibus pars integralis in genere inuenta tantum ad semissem redigi debet, quemadmodum in principiis Calculi integralis fufus est ostensum. Ceterum his casibus posterior pars a circulo pendens semper euanescet.

Corollarium 2.

§. 13. Praeter hos autem binos casus portio integralis ex formula $xx - 2x \cos \omega + 1$ semper constabit duabus partibus, altera logarithmica altera circulari, nisi forte fuerit vel $Ff + Gg = 0$, vel $fG - gF = 0$. Priore enim casu haec portio tantum arcum circulem inuoluet, posteriore vero tantum logarithmum.

Scho-

Scholion.

§. 14. Quoniam assumimus denominatoris Q factorem esse $xx - 2x \cos. \omega + 1$, alias denominatoris formas hic non contemplabimur, nisi quarum omnes factores tali formula exprimi queant. Tales autem formulae simpliciores occurrunt tres sequentes:

$$Q = 1 + x^{2k}, \quad Q = 1 - x^{2k}, \quad Q = 1 + 2x^k \cos. \eta + x^{2k},$$

vbi quidem in prioribus potestati ipsius x exponentem parem tribuimus, quoniam casus, quibus esset impar, facile ad hanc formam reduci possunt. Si enim denominator esset $1 + x^i$, denotante i numerum imparem, tantum loco x scribamus y^2 , prodibitque talis forma: $1 + y^{2i}$; at tali substitutione natura formulae differentialis neutiquam mutatur. Hos ergo tres casus in sequentibus tribus Problematibus particularibus omni cura percurramus, quo magis praestantia istius nouae methodi prae aliis, quae adhuc in usu fuerunt, eluceat.

Problema particulare I.

§. 15. Si fuerit $Q = 1 + x^{2k}$, inuestigare integrale huius formulae differentialis: $\frac{P dx}{(1 + x^{2k}) x}$; vbi quidem $\frac{P}{x}$ sit functio integra, in qua nullae potestates aliores occurrant, quam exponentis $2k$, ne scilicet ista fractio euadat spuria.

Solutio.

Cum sit $Q = 1 + x^{2k}$, sit eius factor tripomialis quicunque $= xx - 2x \cos. \omega + 1$, ita vt numerus talium factorum sit $= k$; quare cum, posito

$$x x - 2 x \cos. \omega + 1 = 0,$$

etiam ipsa formula $1 + x^{2k}$ evanescere debeat, facta substitutione debita secundum Theorema II. fiet

$$Q = 1 + \frac{(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} \sin. 2k\omega + \cos. 2k\omega,$$

qui valor cum debeat evanescere, erit tam $\sin. 2k\omega = 0$, quam $1 + \cos. 2k\omega = 0$. Conditio ergo posterior praebebat $\cos. 2k\omega = -1$; unde intelligitur, angulum $2k\omega$ esse debere vel π , vel 3π , vel 5π , vel in genere $(2i-1)\pi$, denotante $2i-1$ numerum imparem quemcunque. Valores igitur anguli ω erunt sequentes:

$$1^\circ. \omega = \frac{\pi}{2k}, 2^\circ. \omega = \frac{3\pi}{2k}, 3^\circ. \omega = \frac{5\pi}{2k},$$

et generatim $\omega = \frac{(2i-1)\pi}{2k}$, quorum numerus cum esse debeat $= k$, ultimus valor erit $\omega = \frac{(2k-1)\pi}{2k}$; singulis autem istis valoribus simul prior conditio adimpletur, qua esse debet $\sin. 2k\omega = 0$. Quodsi iam pro ω unusquisque horum valorum accipiatur, atque ponatur

$$x x - 2 x \cos. \omega + 1 = 0,$$

quicumque fuerit numerator P, sumamus facta hac substitutione fieri

$$P = \frac{F(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} + G;$$

tum vero erit $\frac{x d Q}{d x} = 2k x^{2k}$, unde, cum nostro casu fieri debeat $Q = 0$, erit utique $x^{2k} = -1$, sicque fiet

$$\frac{x d Q}{d x} = -2k.$$

Cum igitur haec formula in genere posita sit $\frac{f(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} + g$, erit nunc $f = 0$ et $g = -2k$, quo inuento secundum praecepta ante tradita pars integralis ex hoc factore denominatoris $x x - 2 x \cos. \omega + 1$, oriunda erit

$$-\frac{G}{k} \sqrt{(xx - 2x \cos \omega + 1)} + \frac{F}{k} A \operatorname{tang.} \frac{x \sin \omega}{1 - x \cos \omega}.$$

consequenter si ex singulis valoribus anguli ω istae partes integralis fermentur, et in vnam summam colligantur, impetrabitur totum integrale formulae differentialis propositae; et quia hoc casu nunquam fieri potest vel $\omega = 0$, vel $\omega = \pi$, cautione supra indicata non erit opus.

Corollarium 1.

§. 16. Quodsi numerator P fuerit potestas simplex ipsius x , puta x^m , existente $m > 0$, at $m < 2k$, vt formula integranda sit $\int \frac{x^{m-1} dx}{1 + x^{2k}}$, posito

$$xx - 2x \cos \omega + 1 = 0, \text{ erit formula}$$

$$P = x^m = \frac{(x - \cos \omega)}{\sin \omega} \sin. m \omega + \cos. m \omega, \text{ ideoque}$$

$$F = \sin. m \omega \text{ et } G = \cos. m \omega,$$

vnde quaelibet portio integralis induet hanc formam:

$$-\frac{\cos. m \omega}{k} \sqrt{(xx - 2x \cos \omega + 1)} \frac{\sin. m \omega}{k} A \operatorname{tang.} \frac{x \sin \omega}{1 - x \cos \omega},$$

et aggregatum omnium harum partium, siquidem loco ω successiue singuli eius valores substituantur, dabit totum integrale formulae huius propositae, ita sumtum, vt euanescat posito $x = 0$.

Corollarium 2.

§. 17. Si numerator P ex pluribus huiusmodi terminis constet, vt sit $P = ax^a + bx^\beta + cx^\gamma + \text{etc.}$ integratio maiore difficultate non laborat; erit enim

$$F = a \sin. a \omega + b \sin. \beta \omega + c \sin. \gamma \omega \text{ etc. et}$$

$$G = a \cos. a \omega + b \cos. \beta \omega + c \cos. \gamma \omega \text{ etc.}$$

hincque totum integrale facile expeditur.

Scho-

Scholion.

§. 18. Hic autem occurrit casus imprimis memorabilis, quo sumitur $P = x^{k-n} + x^{k+n}$, quem in sequente Problemate speciali seorsim euoluamus.

Problema speciale.

§. 19. Proposita formula differentiali $\frac{x^{k-n} + x^{k+n}}{1 + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$ eius totum integrale euoluere.

Solutio.

Cum hic sit $P = x^{k-n} + x^{k+n}$, si statuamus

$$xx - 2x \cos. \omega + 1 = 0, \text{ fiet}$$

$$P = \frac{x - \cos. \omega}{\sin. \omega} (\sin. (k-n) \omega + \sin. (k+n) \omega + \cos. (k-n) \omega + \cos. (k+n) \omega),$$

unde sponte se produnt litterae F et G; cum autem in genere sit

$$\sin. p + \sin. q = 2 \sin. \frac{p+q}{2} \cdot \cos. \frac{p-q}{2} \text{ et}$$

$$\cos. p + \cos. q = 2 \cos. \frac{p+q}{2} \cdot \cos. \frac{p-q}{2},$$

facta hac reductione reperietur:

$$F = 2 \sin. k \omega \cos. n \omega \text{ et } G = 2 \cos. k \omega \cos. n \omega.$$

Cum autem in genere sit

$$\omega = \frac{(2i-1)\pi}{2k}, \text{ erit } \sin. k \omega = \sin. \frac{(2i-1)\pi}{2},$$

cuius valor est vel $+1$, vel -1 ; vtrumvis autem locum habeat, semper erit $\cos. k \omega = 0$, ita vt sit

$$F = 2 \sin. \frac{(2i-1)\pi}{2} \cos. n \frac{(2i-1)\pi}{2k} \text{ et } G = 0 \cos.;$$

quibus

quibus valoribus inuentis pars integralis ex hoc factore generali oriunda erit

$$\frac{2}{k} \sin. \frac{(2i-1)\pi}{2} \cos. \frac{(2i-1)n\pi}{2k} A \tan. \frac{x \sin. \frac{(2i-1)\pi}{2k}}{1-x \cos. \frac{(2i-1)\pi}{2k}}$$

Hinc ergo, si loco i successiue scribamus valores 1, 2, 3, 4, etc. vsque ad k , totum integrale quaesitum sequenti forma exprimitur:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{k} \cos. \frac{n\pi}{2k} A \tan. \frac{x \sin. \frac{\pi}{2k}}{1-x \cos. \frac{\pi}{2k}} \\ & - \frac{2}{k} \cos. \frac{3n\pi}{2k} A \tan. \frac{x \sin. \frac{3\pi}{2k}}{1-x \cos. \frac{3\pi}{2k}} \\ & + \frac{2}{k} \cos. \frac{5n\pi}{2k} A \tan. \frac{x \sin. \frac{5\pi}{2k}}{1-x \cos. \frac{5\pi}{2k}} \\ & - \frac{2}{k} \cos. \frac{7n\pi}{2k} A \tan. \frac{x \sin. \frac{7\pi}{2k}}{1-x \cos. \frac{7\pi}{2k}} \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \frac{2}{k} \sin. \frac{(2k-1)\pi}{2k} \cos. \frac{(2k-1)n\pi}{2k} A \tan. \frac{x \sin. \frac{(2k-1)\pi}{2k}}{1-x \cos. \frac{(2k-1)\pi}{2k}} \end{aligned}$$

vbi imprimis notatu dignum vsu venit, vt omnes partes logarithmicæ se mutuo destruxerint.

Corollarium I.

§. 20. Quod si ergo sumamus $n=0$, ita vt formula integranda sit $\int \frac{x^k dx}{1+x^{2k}}$, eius integrale hoc modo exprimitur:

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. V. P. I.

$$\begin{aligned} & \frac{2}{k} A \text{ tang. } \frac{x \text{ fin. } \frac{\pi}{2k}}{1 - x \text{ cof. } \frac{\pi}{2k}} - \frac{2}{k} A \text{ tang. } \frac{x \text{ fin. } \frac{3\pi}{2k}}{1 - x \text{ cof. } \frac{3\pi}{2k}} \\ & + \frac{2}{k} A \text{ tang. } \frac{x \text{ fin. } \frac{5\pi}{2k}}{1 - x \text{ cof. } \frac{5\pi}{2k}} + \dots \\ & + \frac{2}{k} \text{ fin. } \frac{(2k-1)\pi}{2k} A \text{ tang. } \frac{x \text{ fin. } \frac{(2k-1)\pi}{2k}}{1 - x \text{ cof. } \frac{(2k-1)\pi}{2k}}. \end{aligned}$$

At posito $x^k = z$, ob $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{kz}$, formula integralis induet hanc formam: $\int \frac{2 dz}{k(1+z^2)}$, cuius integrale manifesto est

$$\frac{2}{k} A \text{ tang. } z = \frac{2}{k} A \text{ tang. } x^k,$$

unde sequitur fore

$$\begin{aligned} A \text{ tang. } x^k &= A \text{ tang. } \frac{x \text{ fin. } \frac{\pi}{2k}}{1 - x \text{ cof. } \frac{\pi}{2k}} - A \text{ tang. } \frac{x \text{ fin. } \frac{3\pi}{2k}}{1 - x \text{ cof. } \frac{3\pi}{2k}} \\ & + A \text{ tang. } \frac{x \text{ fin. } \frac{5\pi}{2k}}{1 - x \text{ cof. } \frac{5\pi}{2k}} - \dots \\ & + \text{fin. } \frac{(2k-1)\pi}{2k} A \text{ tang. } \frac{x \text{ fin. } \frac{(2k-1)\pi}{2k}}{1 - x \text{ cof. } \frac{(2k-1)\pi}{2k}}, \end{aligned}$$

quod sane est Theorema maxima attentione dignum.

Corollarium 2.

§. 21. Ad hoc Theorema illustrandum sumamus $k=1$, et ob $\text{fin. } \frac{\pi}{2} = 1$ et $\text{cof. } \frac{\pi}{2} = 0$ prodit manifesto

$$A \text{ tang. } x = A \text{ tang. } x.$$

At sumto $k=2$, ob $\text{fin. } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{cof. } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{fin. } \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\text{cof. } \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, fiet

$$A \text{ tang. } x^2 = A \text{ tang. } \frac{x}{\sqrt{2}-x} - A \text{ tang. } \frac{x}{\sqrt{2}+x}.$$

Cum

Cum autem in genere fit

$$A \text{ tang. } p - A \text{ tang. } q = A \text{ tang. } \frac{p - q}{1 + pq},$$

hoc casu erit

$$p = \frac{x}{\sqrt{2-x}} \text{ et } q = \frac{x}{\sqrt{2+x}}, \text{ ideoque}$$

$$p - q = \frac{2xx}{2-xx} \text{ et } 1 + pq = \frac{2}{2-xx},$$

vnde manifesto prodit

$$A \text{ tang. } xx = A \text{ tang. } x x.$$

Sumamus porro $k = 3$, et ob

$$\sin. \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \cos. \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin. \frac{5\pi}{6} = 1, \cos. \frac{5\pi}{6} = 0,$$

$$\sin. \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ et } \cos. \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ reperietur}$$

$$A \text{ tang. } x^3 = A \text{ tang. } \frac{x}{2-x\sqrt{3}} - \text{tang. } x + A \text{ tang. } \frac{x}{2+x\sqrt{3}},$$

vbi per reductionem superiorem Arcus primus et tertius iunctim sumti, ob

$$p = \frac{x}{2-x\sqrt{3}} \text{ et } q = \frac{-x}{2+x\sqrt{3}},$$

praebent $A \text{ tang. } \frac{x}{1-xx}$, a quo si subtrahatur $A \text{ tang. } x$, remanebit $A \text{ tang. } x^3$.

Scholion.

§. 22. Ceterum veritas huius theorematis in genere comodissime sumendis differentialibus ostendi potest. Cum enim fit

$$d. A \text{ tang. } x^k = \frac{k x^{k-1} dx}{1 + x^{2k}} \text{ et}$$

$$d. A \text{ tang. } \frac{x \sin. \omega}{1 - x \cos. \omega} = \frac{dx \sin. \omega}{1 - 2x \cos. \omega + x^2},$$

si loco ω valores debiti successive substituantur et per dx diuidatur, resultabit sequens aequatio:

C 2

kx

$$\frac{k x^{k-1}}{1+x^{2k}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2k}}{1-2x \cos \frac{\pi}{2k} + x^2} - \frac{\sin \frac{3\pi}{2k}}{1-2x \cos \frac{3\pi}{2k} + x^2} + \dots + \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi}{2k}}{1-2x \cos \frac{(2k-1)\pi}{2k} + x^2},$$

quae sunt eae ipsae fractiones partiales, in quas functio fracta $\frac{k x^{k-1}}{1+x^{2k}}$ resolvitur. Ceterum cum in hac integratione omnes logarithmi excefferint, duplex quaestio circa integrale inuentum institui potest, altera, qua quaeritur eius valor casu $x = \infty$, altera vero casu quo sumitur $x = 1$.

Quaestio prior.

§. 23. *Proposita formula differentiali $\frac{x^{k-n} + x^{k+n}}{1+x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$, eius integralis valorem inuestigare, qui oritur si post integrationem ponitur $x = \infty$.*

Solutio.

Cum quilibet arcus in expressione integralis inuenti §. 19 in genere sit huiusmodi: $A \tan \frac{x \sin \omega}{1 - x \cos \omega}$, si statuatur $x = \infty$, is hanc induet formam: $A \tan (-\tan \omega)$. Quia autem $-\tan \omega = +\tan(\pi - \omega)$, iste arcus fiet $= \pi - \omega$; quare si loco ω successive valores debitos substituiamus, integrale quaesitum sequenti serie exprimetur:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{k} \left(\pi - \frac{\pi}{2k} \right) \cos \frac{\pi}{2k} - \frac{2}{k} \left(\pi - \frac{3\pi}{2k} \right) \cos \frac{3\pi}{2k} \\ & + \frac{2}{k} \left(\pi - \frac{5\pi}{2k} \right) \cos \frac{5\pi}{2k} - \frac{2}{k} \left(\pi - \frac{7\pi}{2k} \right) \cos \frac{7\pi}{2k} \\ & + \dots + \frac{2}{k} \left(\pi - \frac{(2k-1)\pi}{2k} \right) \cos \frac{(2k-1)\pi}{2k}, \end{aligned}$$

cuius

cuius ultimum membrum habebit signum +, quoties fuerit $2k-1$ numerus formae $4\alpha+1$, siue $k=2\alpha+1$, ideoque k numerus impar; at vero signum - valebit, si $2k-1$ fuerit formae $4\alpha-1$, siue $k=2\alpha$, ideoque numerus par. Ad valorem huius seriei inveniendum ponamus:

$$S = \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \cos \frac{n\pi}{2k} - \left(1 - \frac{3}{2k}\right) \cos \frac{3n\pi}{2k} + \left(1 - \frac{5}{2k}\right) \cos \frac{5n\pi}{2k} \\ - \left(1 - \frac{7}{2k}\right) \cos \frac{7n\pi}{2k} + \left(1 - \frac{9}{2k}\right) \cos \frac{9n\pi}{2k} \\ - \dots - \dots - \dots + \left(1 - \frac{(2k-1)}{2k}\right) \cos \frac{(2k-1)n\pi}{2k},$$

ita ut valor noster quaesitus sit $\frac{2\pi S}{k}$. Quo nunc valorem ipsius S inuestigemus, multiplicemus vtrunque per $2 \cos \frac{n\pi}{2k}$, et cum in genere sit

$$2 \cos \frac{n\pi}{2k} \cos \frac{(2i-1)n\pi}{2k} = \cos \frac{in\pi}{k} + \cos \frac{(i-1)n\pi}{k},$$

adhibita ista reductione reperietur

$$\left\{ \begin{aligned} &+ \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \cos \frac{n\pi}{k} - \left(1 - \frac{3}{2k}\right) \cos \frac{3n\pi}{k} \\ &+ \left(1 - \frac{3}{2k}\right) \cos \frac{n\pi}{k} + \left(1 - \frac{5}{2k}\right) \cos \frac{3n\pi}{k} \\ &+ \left(1 - \frac{5}{2k}\right) \cos \frac{3n\pi}{k} - \left(1 - \frac{7}{2k}\right) \cos \frac{5n\pi}{k} + \text{etc.} \\ &- \left(1 - \frac{7}{2k}\right) \cos \frac{3n\pi}{k} + \left(1 - \frac{9}{2k}\right) \cos \frac{5n\pi}{k} - \text{etc.} \end{aligned} \right\}$$

vbi patet, quemlibet terminum superiorem cum sequente inferiori in vnicum coalescere, ita ut tantum primus inferior, qui est $\left(1 - \frac{1}{2k}\right)$, et ultimus superior, qui est $+\frac{1}{2k} \cos \frac{n\pi}{k}$, solitarii relinquantur; facta ergo hac contractione reperietur:

$$2S \cos \frac{n\pi}{2k} = 1 - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} \cos \frac{n\pi}{k} + \frac{1}{k} \cos \frac{n\pi}{k} - \frac{1}{k} \cos \frac{3n\pi}{k} \\ + \frac{1}{k} \cos \frac{3n\pi}{k} - \dots - \dots - \dots + \frac{1}{k} \cos \frac{(k-1)n\pi}{k},$$

vbi signum superius valet, si k fuerit numerus impar, inferius autem si k fuerit numerus par. Ponamus porro ad hanc seriem summendam

$$T = \cos. \frac{n\pi}{k} - \cos. \frac{2n\pi}{k} + \cos. \frac{3n\pi}{k} - \cos. \frac{4n\pi}{k} \\ + \dots + \cos. \frac{(k-1)n\pi}{k},$$

ita vt hoc valore T inuento futurum fit

$$2 S \cos. \frac{n\pi}{2k} = 1 - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} \cos. n\pi + \frac{T}{k}.$$

Multiplicemus simili modo vtrique per $2 \cos. \frac{n\pi}{2k}$, et in subsidium vocata eadem reductione reperietur:

$$2 T \cos. \frac{n\pi}{2k} = \left\{ \begin{array}{l} + \cos. \frac{3n\pi}{2k} - \cos. \frac{5n\pi}{2k} \\ + \cos. \frac{n\pi}{2k} - \cos. \frac{3n\pi}{2k} + \cos. \frac{5n\pi}{2k} \\ + \cos. \frac{7n\pi}{2k} \dots + \cos. \frac{(2k-1)n\pi}{2k} \\ - \cos. \frac{7n\pi}{2k} \dots \end{array} \right\}$$

vbi omnes termini se mutuo destruunt, praeter primum inferiorem et vltimum superiorem, ita vt obtineamus:

$$2 T \cos. \frac{n\pi}{2k} = \cos. \frac{n\pi}{2k} - \cos. \frac{(2k-1)n\pi}{2k}.$$

Quia autem

$$\frac{(2k-1)n\pi}{2k} = n\pi - \frac{n\pi}{2k}, \text{ erit}$$

$$\cos. \frac{(2k-1)n\pi}{2k} = \cos. n\pi \cos. \frac{n\pi}{2k} + \sin. n\pi \sin. \frac{n\pi}{2k},$$

quoniam vero n supponitur numerus integer, erit

$$\sin. n\pi = 0, \text{ ideoque}$$

$$2 T \cos. \frac{n\pi}{2k} = \cos. \frac{n\pi}{2k} - \cos. n\pi \cos. \frac{n\pi}{2k},$$

vnde fit

$$T = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos. n\pi, \text{ quo valore substituto fiet}$$

$$2 S \cos. \frac{n\pi}{2k} = 1, \text{ consequenter}$$

$S = \frac{\pi}{2 \cos \frac{n\pi}{2k}}$, ideoque valor noster quaesitus erit

$\frac{\pi}{k \cos \frac{n\pi}{2k}}$, vnde nascitur sequens

Theorema 1.

§. 24. Ista formula integralis:

$$\int \frac{x^{k-n} + x^{k+n}}{1 + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$$

a termino $x = 0$ usque ad terminum $x = \infty$ extensa, producit hunc valorem: $\frac{\pi}{k \cos \frac{n\pi}{2k}}$, cuius demonstratio ex praecedente paragrapho liquet. Huic adiungi potest sequens Theorema, quod prorsus singulari demonstratione ex isto derivare licet.

Theorema 2.

§. 25. Si tam ista formula integralis: $\int \frac{x^{k-n}}{1 + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$,

quam haec: $\int \frac{x^{k+n}}{1 + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$, a termino $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extendatur, utraque producet eandem summam, quae est

$$\frac{\pi}{2k \cos \frac{n\pi}{2k}}.$$

Demonstratio.

Ponatur $S = \int \frac{x^{k-n}}{1 + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$, siquidem integratio a termino $x = 0$ usque ad terminum $x = \infty$ extendatur, ac

ponatur $x = \frac{1}{z}$, ita vt iam integratio absolui debeat a termino ∞ vsque ad 0, et ob $\frac{dz}{z} = -\frac{dz}{z}$ habebitur nunc

$-\int \frac{z^{-k+n}}{1+z^{-2k}} \cdot \frac{dz}{z}$, quae, si numerator ac denominator multiplicetur per z^{2k} , abit in hanc:

$$S = -\int \frac{z^{k+n}}{1+z^{2k}} \cdot \frac{dz}{z}$$

integratione a termino $z = \infty$ vsque ad $z = 0$ extensa. Hinc permutatis terminis integrationis erit

$$S = \int \frac{z^{k+n}}{1+z^{2k}} \cdot \frac{dz}{z}$$

a termino $z = 0$ vsque ad $z = \infty$, vnde si loco z scribatur x , manifestum est, vtramque formulam, a termino $x = 0$ vsque ad $x = \infty$ extensam, eandem habere summam S . Cum igitur ambae hae formulae iunctae praebeant summam $2S = \frac{\pi}{k} \operatorname{cof.} \frac{n\pi}{2k}$, erit vtique vtriusque formulae va-

lor seorsim $S = \frac{\pi}{2k \operatorname{cof.} \frac{n\pi}{2k}}$.

Quaestio altera.

§. 26. *Proposita formula differentiali*

$$\frac{x^{k-n} + x^{k+n}}{1+x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$$

eius integralis valorem inuestigare, qui oritur, si post integrationem ponatur $x = 1$.

Solutio.

Cum in forma integralis generali quilibet terminus inuentus sit $\frac{\pi}{n} \operatorname{cof.} n \omega A \operatorname{tang.} \frac{\omega \sin \omega}{1 - x \cos \omega}$, fiat hic $x = 1$

ac

ac prodibit $\frac{2}{k} \cos. n \omega A \text{ tang. } \frac{\sin. \omega}{1 - \cos. \omega}$, quae forma ob

$\sin. \omega = 2 \sin. \frac{1}{2} \omega \cos. \frac{1}{2} \omega$ et $1 - \cos. \omega = 2 \sin. \frac{1}{2} \omega$ abit in hanc:

$$\frac{2}{k} \cos. n \omega A \text{ tang. } \frac{\cos. \frac{1}{2} \omega}{\sin. \frac{1}{2} \omega}$$

quae, cum sit

$$\frac{\cos. \frac{1}{2} \omega}{\sin. \frac{1}{2} \omega} = \cot. \frac{1}{2} \omega = \text{tang. } \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \omega \right),$$

porro transformatur in hanc:

$$\frac{2}{k} \cos. n \omega \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \omega \right) = \frac{1}{k} (\pi - \omega) \cos. n \omega.$$

Quod si igitur hic loco ω successive scribamus eius valores, qui sunt $\frac{\pi}{2k}, \frac{3\pi}{2k}, \frac{5\pi}{2k}$, vsque ad $\frac{(2k-1)\pi}{2k}$, valor integralis quaesitus exprimetur per hanc progressionem:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} \left(\pi - \frac{\pi}{2k} \right) \cos. \frac{n\pi}{2k} - \frac{1}{k} \left(\pi - \frac{3\pi}{2k} \right) \cos. \frac{3n\pi}{2k} + \frac{1}{k} \left(\pi - \frac{5\pi}{2k} \right) \cos. \frac{5n\pi}{2k} \\ & - \frac{1}{k} \left(\pi - \frac{7\pi}{2k} \right) \cos. \frac{7n\pi}{2k} - \dots - \pm \frac{1}{k} \left(\pi - \frac{(2k-1)\pi}{2k} \right) \cos. \frac{(2k-1)n\pi}{2k} \end{aligned}$$

vbi signorum ambiguum superius valet si k fuerit numerus impar, inferius vero si par. Comparemus hanc expressionem cum ea, ad quam in quaestione praecedente est peruentum, ac reperiemus, hanc illius praecise esse semis-

fem, vnde eius valor erit $\frac{\pi}{2k \cos. \frac{n\pi}{2k}}$, ficque habebitur sequens

Theorema.

§. 27. *Ista formula integralis: $\int \frac{x^{k-n} + x^{k+n}}{1 + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$, a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = 1$ extensa, producet hunc valorem: $\frac{\pi}{2k \cos. \frac{n\pi}{2k}}$*

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. V. P. I.

D

Corol.

Corollarium.

§. 28. Cum igitur huius formulae integrale, a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extensum, sit dimidium eius, quod a termino $x = 0$ vsque ad $x = \infty$ extenditur, sequitur, si eadem formula integralis a termino $x = 1$ vsque ad $x = \infty$ extendatur, eius valorem quoque fore $\frac{\pi}{2k \cos \frac{\pi}{2k}}$, praeterea vero utriusque valor aequabitur huic

formulae integrali: $\int \frac{x^{k-1}}{1+x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$, siquidem ab $x = 0$ vsque ad $x = \infty$ extendatur.

Problema particulare II.

§. 29. Si sumatur $Q = 1 - x^{2k}$, investigare integrale huius formulae differentialis: $\frac{P dx}{(1-x^{2k})}$, ubi quidem $\frac{P}{x}$ sit functio integra, in qua nullae potestates altiores occurrant quam exponentis $2k$, ne scilicet ista fractio evadat spuria.

Solutio.

Cum sit $Q = 1 - x^{2k}$, statim duo eius habentur factores simplices reales, qui sunt $1 - x$ et $1 + x$, quare partes integrales ex iis oriundas primum inuestigemus. Ponamus igitur pro factore $1 - x$ fractionem

$$\frac{P}{x(1-x^{2k})} = \frac{a}{1-x} + R,$$

ubi R complectitur omnes reliquas partes, unde per $1 - x$ multiplicando habebimus

P

$$\frac{P(1-x)}{x(1-x^{2k})} = \alpha + R(1-x);$$

quare si faciamus $x = 1$, nanciscemur

$$\alpha = \frac{P}{x} \cdot \frac{1-x}{1-x^{2k}},$$

cuius posterioris fractionis, posito $x = 1$, tam numerator quam denominator evanescit, hinc eorum loco scribamus eorum differentialia, fietque

$$\alpha = \frac{P}{x} \cdot \frac{1}{2k x^{2k-1}}.$$

Fiat igitur nunc $x = 1$, quo casu abeat P in B , ac prodibit $\alpha = \frac{B}{2k}$; ex fractione autem partiali $\frac{\alpha}{1-x}$ porro reperitur pars integralis inde nata

$$= -\alpha l(1-x) = -\frac{B}{2k} l(1-x).$$

Pro altero factore $1+x$ faciamus simili modo

$$\frac{P}{x(1-x^{2k})} = \frac{\beta}{1+x} + R,$$

vnde per $1+x$ multiplicando fit

$$\frac{P(1+x)}{x(1-x^{2k})} = \beta + R(1+x),$$

quare si faciamus $x = -1$, erit

$$\beta = \frac{P}{x} \cdot \frac{1+x}{1-x^{2k}},$$

vbi in posteriore fractione differentialia tam supra quam infra scribantur, ut prodeat

$$\beta = \frac{P}{x} \cdot \frac{1}{-2k x^{2k-1}} = -\frac{P}{2k x^{2k}} = -\frac{P}{2k},$$

D 2,

posito

posito scilicet $x = -1$. Ponamus ergo, facto $x = -1$, functionem P abire in functionem C , fietque $\beta = -\frac{C}{2k}$, et ex fractione partiali $\frac{\beta}{1+x}$, obtinebitur pars inde nata integralis $\beta \int (1+x) = -\frac{C}{2k} \int (1+x)$, sicque ex ambobus factoribus $(1+x)$ et $(1-x)$ nascuntur hae duae partes integrales: $-\frac{B}{2k} \int (1-x) - \frac{C}{2k} \int (1+x)$. His expeditis fit formulae $1 - x^{2k}$ factor trinomialis quicunque $1 - 2x \cos. \omega + x^2$, quo facto $= 0$, ista formula $1 - x^{2k}$ induet hanc formam:

$$1 - \frac{(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} \sin. 2k\omega - \cos. 2k\omega,$$

quae formula, cum debeat euanescere, has suppeditat conditiones:

$$1^\circ. \sin. 2k\omega = 0 \text{ et } 2^\circ. \cos. 2k\omega = 1;$$

ex posteriore statim intelligitur angulum ω sequentes valores accipere posse:

$$1^\circ. \omega = 0, \quad 2^\circ. \omega = \frac{2\pi}{2k} = \frac{\pi}{k}, \quad 3^\circ. \omega = \frac{4\pi}{2k} = \frac{2\pi}{k},$$

et in genere $\omega = \frac{i\pi}{k}$. Quia igitur numerus horum valorum debet esse $= k$, primus autem $\omega = 0$ tantum factori simplici respondet, numerus valorum debet sumi $k+1$, ita ut iam ultimus futurus sit $\frac{k\pi}{k} = \pi$, vnde alter factor simplex $1+x$ nascitur; hoc autem modo simul primae conditioni satisfit, qua esse debet $\sin. 2k\omega = 0$. Nunc consideremus factorem generalem $xx - 2x \cos. \omega + 1$, quo posito $= 0$ fiat

$$P = \frac{F(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} + G, \text{ eritque } \frac{x dQ}{dx} = -2kx^{2k};$$

at vero iam vidimus, tum fieri $x^{2k} = 1$ sicque $\frac{x dQ}{dx} = -2k$,
pro

pro qua forma in genere posuimus $\frac{f(x - \cos \omega)}{\sin \omega} + g$, quo circa pro nostro casu erit $f = 0$ et $g = -2k$. Cum igitur pro hoc factore in genere inuenta sit ista pars integralis:

$$\frac{2(Ff + Gg)}{ff + gg} lV(xx - 2x \cos \omega + 1) + \frac{2(fG - Fg)}{ff + gg} A \operatorname{tang.} \frac{x \sin \omega}{1 - x \cos \omega},$$

erit ista pars nostro casu

$$- \frac{G}{k} lV(xx - 2x \cos \omega + 1) + \frac{F}{k} A \operatorname{tang.} \frac{x \sin \omega}{1 - x \cos \omega},$$

consequenter si loco ω successue scribantur valores indicati, scilicet $\omega = 0$, $\omega = \frac{\pi}{k}$, $\omega = \frac{2\pi}{k}$, vsque ad $\omega = (k-i)\frac{\pi}{k}$, et omnes istae partes in vnā summam colligantur, obtinebitur totum integrale formulae propositae. Hic autem probe obseruandum est, ex parte prima et vltima eas ipsas partes oriri, quas iam pro valoribus $(1-x)$ et $(1+x)$ assignauimus, quare eas penitus omitti conueniet.

Corollarium I.

§. 30. Quodsi numerator P fuerit potestas simplex ipsius x , puta x^m , existente $m > 1$ et $m < 2k$, vt formula integranda sit $\int \frac{x^{m-1} dx}{1 + x^{2k}}$, pro factoribus simplicibus $1-x$ et $1+x$ erit $B = +1$ et $C = (-1)^m$, vnde partes integralis hinc natae erunt

$$-\frac{1}{2k} l(1-x) - \frac{(-1)^m}{2k} l(1+x).$$

Pro reliquis vero partibus erit $F = \sin m\omega$ et $G = \cos m\omega$, vnde quaelibet portio integralis induet hanc formam:

$$-\frac{\cos. m \omega}{k} \sqrt{(x x - 2 x \cos. \omega + 1)} + \frac{\sin. m \omega}{k} A \tan g. \frac{x \sin. \omega}{1 - x \cos. \omega},$$

vbi valores pro ω substituendi sunt

$$\frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}, \dots, \frac{(k-1)\pi}{k}.$$

Corollarium 2.

§. 31. Si numerator P pluribus huiusmodi terminis conficit, ut sit $P = a x^2 + b x^3 + c x^4 + \text{etc.}$ integratio maiore difficultate non laborat; erit enim

$$F = a \sin. \alpha \omega + b \sin. \beta \omega + c \sin. \gamma \omega + \text{etc. et}$$

$$G = a \cos. \alpha \omega + b \cos. \beta \omega + c \cos. \gamma \omega + \text{etc.}$$

hincque totum integrale facile expeditur.

Scholion.

§. 32. Casus prae ceteris memoratu dignus, qui hic occurrit est, quo statuitur $P = x^{k-n} - x^{k+n}$, quippe quo omnes partes logarithmicae se mutuo tollere reperiuntur, unde eum in sequente Problemate euoluamus.

Problema speciale.

§. 33. Proposita formula differentiali $\frac{x^{k-n} - x^{k+n}}{1 + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$

eius totum integrale inuestigare.

Solutio.

Quia hic est $P = x^{k-n} - x^{k+n} = x^{k-n} (x - x^{2n})$, ob n numerum integrum posito tam $x = 1$ quam $x = -1$ iste valor euanesceat, unde fiet tam $B = 0$ quam $C = 0$, sicque partes integrales ex factoribus simplicibus natae sponte

sponte evanescunt. Pro factore autem duplici quocunque

$$1 - 2x \cos. \omega + x^2,$$

eo facto = 0 reperietur:

$$P = \frac{x - \cos. \omega}{\sin. \omega} (\sin. (k-n) \omega - \sin. (k+n) \omega) \\ + \cos. (k-n) \omega - \cos. (k+n) \omega,$$

hincque colligitur:

$$F = \sin. (k-n) \omega - \sin. (k+n) \omega \text{ et}$$

$$G = \cos. (k-n) \omega - \cos. (k+n) \omega.$$

Cum autem in genere sit

$$\sin. p - \sin. q = 2 \sin. \frac{p-q}{2} \cos. \frac{p+q}{2} \text{ et}$$

$$\cos. p - \cos. q = 2 \sin. \frac{q-p}{2} \sin. \frac{p+q}{2}, \text{ ob}$$

$$p = (k-n) \omega \text{ et } q = (k+n) \omega \text{ erit}$$

$$F = -2 \sin. n \omega \cos. k \omega \text{ et } G = 2 \sin. n \omega \sin. k \omega.$$

Est vero vti vidimus in genere $\omega = \frac{i\pi}{k}$, vnde fit

$$\sin. k \omega = \sin. i \pi = 0 \text{ et } \cos. k \omega = \pm 1,$$

scilicet valebit ± 1 , si i est numerus par, et -1 si i impar. Ad hanc autem ambiguitatem evitandam retineamus $\cos. k \omega$, atque habebimus

$$F = -2 \sin. n \omega \cos. k \omega \text{ et } G = 0.$$

Ex his igitur pars integralis quaecunque in genere erit:

$$- \frac{2 \sin. n \omega \cos. k \omega}{k} A \tan. \frac{x \sin. \omega}{1 - x \cos. \omega},$$

vbi tantum opus est loco ω valores indicatos successive substitui; et quia pro primo $\omega = 0$ et ultimo $\omega = \pi$ partes integrales sponte evanescunt, perinde est siue valores primus et ultimus reiciantur siue retineantur, quamobrem totum integrale quaesitum sequenti modo exprimetur:

+ 2

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{k} \sin. \frac{n\pi}{k} A \operatorname{tang.} \frac{x \sin. \frac{\pi}{k}}{1 - x \cos. \frac{\pi}{k}} \\
 & - \frac{2}{k} \sin. \frac{2n\pi}{k} A \operatorname{tang.} \frac{x \sin. \frac{2\pi}{k}}{1 - x \cos. \frac{2\pi}{k}} \\
 & + \frac{2}{k} \sin. \frac{3n\pi}{k} A \operatorname{tag.} \frac{x \sin. \frac{3\pi}{k}}{1 - x \cos. \frac{3\pi}{k}} \\
 & - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\
 & + \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\
 & \pm \frac{2}{k} \sin. \frac{(k-1)n\pi}{k} A \operatorname{tang.} \frac{x \sin. \frac{(k-1)\pi}{k}}{1 - x \cos. \frac{(k-1)\pi}{k}},
 \end{aligned}$$

vbi signum superius valet si n fuerit numerus par, inferius vero si impar.

Còrollarium.

§. 34. Si hic sumere velimus $n=0$, formula integranda sponte euanescit, ita vt hic nihil memoratu dignum resultet, vnde in valores huius integralis pro casibus $x=\infty$ et $x=1$ inquiramus.

Quaestio prior.

§. 35. *Proposita formula differentiali*

$$\frac{x^{k-n} - x^{k+n}}{1 - x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x},$$

eius valorem integralem inuestigare, qui oritur si post integrationem ponitur $x=\infty$.

Solutio.

Cum arcuum qui hic occurrunt forma generalis sit $A \operatorname{tang.} \frac{x \sin. \omega}{1 - x \cos. \omega}$, ea, posito $x=\infty$, vti ante vidimus, abit in $\pi - \omega$, vnde litterae ω valores suos ordine tribuendo

valor

valor quaesitus nostrae formulae integralis sequenti progressionem exprimitur:

$$\frac{2}{k} \left(\pi - \frac{\pi}{k} \right) \sin. \frac{n\pi}{k} - \frac{2}{k} \left(\pi - \frac{2\pi}{k} \right) \sin. \frac{2n\pi}{k} + \frac{2}{k} \left(\pi - \frac{3\pi}{k} \right) \sin. \frac{3n\pi}{k} \\ - \frac{2}{k} \left(\pi - \frac{4\pi}{k} \right) \sin. \frac{4n\pi}{k} + \dots + \frac{2}{k} \left(\pi - \frac{(k-1)\pi}{k} \right) \sin. \frac{(k-1)n\pi}{k}.$$

Ad huius valorem inuestigandum ponamus:

$$S = \left(1 - \frac{1}{k} \right) \sin. \frac{n\pi}{k} - \left(1 - \frac{2}{k} \right) \sin. \frac{2n\pi}{k} + \left(1 - \frac{3}{k} \right) \sin. \frac{3n\pi}{k} \\ - \left(1 - \frac{4}{k} \right) \sin. \frac{4n\pi}{k} \dots + \left(1 - \frac{(k-1)}{k} \right) \sin. \frac{(k-1)n\pi}{k}$$

ita ut valor quem quaerimus sit $\frac{2\pi S}{k}$. Multiplicemus igitur ut haecenus utrinque per $2 \cos. \frac{n\pi}{2k}$, et cum in genere sit

$$2 \sin. \frac{in\pi}{k} \cos. \frac{n\pi}{2k} = \sin. \frac{(2i+1)n\pi}{2k} + \sin. \frac{(2i-1)n\pi}{2k},$$

facta hac reductione perueniemus ad sequentem expressionem:

$$2 S \cos. \frac{n\pi}{2k} = \left\{ \begin{aligned} & + \left(1 - \frac{1}{k} \right) \sin. \frac{3n\pi}{2k} - \left(1 - \frac{2}{k} \right) \sin. \frac{5n\pi}{2k} \\ & \left(1 - \frac{1}{k} \right) \sin. \frac{n\pi}{2k} - \left(1 - \frac{2}{k} \right) \sin. \frac{3n\pi}{2k} + \left(1 - \frac{3}{k} \right) \sin. \frac{5n\pi}{2k} \\ & + \left(1 - \frac{3}{k} \right) \sin. \frac{7n\pi}{2k} \dots + \left(1 - \frac{(k-3)}{k} \right) \sin. \frac{(2k-3)n\pi}{2k} \\ & - \left(1 - \frac{5}{k} \right) \sin. \frac{7n\pi}{2k} \dots + \left(1 - \frac{(k-1)}{k} \right) \sin. \frac{(2k-1)n\pi}{2k} \end{aligned} \right\}$$

vbi quilibet terminus superior cum sequente inferiori in vnum contrahi potest, unde primum inferiorem cum ultimo superiori seorsim exhibeamus hoc modo:

$$2 S \cos. \frac{n\pi}{2k} = \left(1 - \frac{1}{k} \right) \sin. \frac{n\pi}{2k} + \frac{1}{k} \sin. \frac{(2k-1)n\pi}{2k} \\ + \frac{1}{k} \sin. \frac{5n\pi}{2k} - \frac{1}{k} \sin. \frac{5n\pi}{2k} + \frac{1}{k} \sin. \frac{7n\pi}{2k} - \frac{1}{k} \sin. \frac{(2k-3)n\pi}{2k}.$$

Hoc igitur modo vltimus superior cum reliquis eandem legem sequitur, ita ut ponere liceat:

$$2 S \cos. \frac{n\pi}{2k} = \left(1 - \frac{1}{k} \right) \sin. \frac{n\pi}{2k} \\ + \frac{1}{k} \sin. \frac{3n\pi}{2k} - \frac{1}{k} \sin. \frac{5n\pi}{2k} + \frac{1}{k} \sin. \frac{7n\pi}{2k} \dots + \frac{1}{k} \sin. \frac{(2k-1)n\pi}{2k}.$$

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. V. P. I.

E

Sta-

Statuamus porro

$$T = \sin. \frac{n\pi}{2k} - \sin. \frac{3n\pi}{2k} + \sin. \frac{5n\pi}{2k} - \dots + \sin. \frac{(2k-1)n\pi}{2k},$$

vt fit

$$2 S \cos. \frac{n\pi}{2k} = (1 - \frac{1}{k}) \sin. \frac{n\pi}{2k} + \frac{T}{k}.$$

Iam iterum multiplicemus per $2 \cos. \frac{n\pi}{2k}$, et adhibita eadem reductione reperiemus:

$$2 T \cos. \frac{n\pi}{2k} = \sin. \frac{3n\pi}{k} - \sin. \frac{5n\pi}{k} + \sin. \frac{7n\pi}{k} - \dots + \sin. \frac{n\pi}{k} \\ + \sin. \frac{n\pi}{k} - \sin. \frac{3n\pi}{k} + \sin. \frac{5n\pi}{k} - \sin. \frac{7n\pi}{k} + \dots + \sin. \frac{(k-1)n\pi}{k},$$

vbi, destructis terminis qui se mutuo tollunt, obtinebitur:

$$2 T \cos. \frac{n\pi}{2k} = \sin. \frac{n\pi}{k} \pm \sin. n\pi = \sin. \frac{n\pi}{k}, \text{ ob } n\pi = 0.$$

Quia igitur est

$$\sin. \frac{n\pi}{k} = 2 \sin. \frac{n\pi}{2k} \cos. \frac{n\pi}{2k}, \text{ erit } T = \sin. \frac{n\pi}{2k},$$

quo valore substituto fiet

$$2 S \cos. \frac{n\pi}{2k} = \sin. \frac{n\pi}{2k},$$

ideoque $S = \frac{1}{2} \text{ tang. } \frac{n\pi}{2k}$, consequenter nostrae formulae integralis, casu $x = \infty$, valor erit $\frac{\pi}{k} \text{ tang. } \frac{n\pi}{2k}$, vnde nascitur sequens

Theorema.

§. 36. Ista formula integralis: $\int \frac{x^{k-n} + x^{k+n} dx}{1 - x^{2k}} \cdot \frac{1}{x}$, a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = \infty$ extensa, producit hunc valorem: $\frac{\pi}{k} \text{ tang. } \frac{n\pi}{2k}$.

Scholion.

§. 37. Cum haec formula duabus constet partibus, si simili modo, vt supra factum est, in valorem vtriusque seorsim inquirere velimus, vtriusque valor adeo ima-

ginarius esse deprehendetur, id quod facile inde percipitur, quod posito $x=1$ ipsa fractio iam in infinitum excrescat. Tractemus autem ut supra partem priorem, ponendo $S = \int \frac{x^{k-n}}{1-x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$, a termino $x=0$ vsque ad $x=\infty$,

ac faciendo $x = \frac{z}{1}$, fiet

$$S = - \int \frac{z^{-k+n}}{1-z^{2k}} \cdot \frac{dz}{z} = - \int \frac{z^{k+n}}{z^{2k}-1} \cdot \frac{dz}{z},$$

a termino $z=\infty$ vsque ad $z=0$, ergo mutatis terminis integrationis erit

$$S = - \int \frac{z^{k+n}}{1-z^{2k}} \cdot \frac{dz}{z}$$

a termino $z=0$ vsque ad $z=\infty$; vnde si loco z scribamus x et has formulas iungamus, erit

$$2S = \int \frac{x^{k-n} - x^{k+n}}{1-x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{k} \text{tang. } \frac{n\pi}{2k}.$$

vnde prodiret $S = \frac{\pi}{2k} \text{tang. } \frac{n\pi}{2k}$. Haec autem conclusio admittere nequit, quoniam nostra formula integralis eatenus tantum ad arcum circulare reduci poterit, quatenus numerator $x^{k-n} - x^{k+n}$ cum denominatore $1-x^{2k}$ factorem communem habet $1-xx$, qui ergo semper diuisionem tolli posset. Verum sumpta tantum alterutra parte, iste factor $1-xx$ ex denominatore non tollitur, ex eoque igitur necessario nasceretur pars integralis vel huius formae: $\alpha \int \frac{1+x}{1-x}$, vel huius: $\alpha \int (1-xx)$, quae vtraque forma, sumto $x=\infty$, fit imaginaria.

Quaestio altera.

§. 38. *Proposita formula differentiali*

$$\frac{x^k - n - x^{k+n}}{1 - x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$$

eius integrale inuestigare, quod oritur, si post integrationem ponitur $x = 1$.

Solutio.

Si in forma generali arcuum, quibus integrale exprimitur, quae est $A \operatorname{tang.} \frac{x \sin. \omega}{1 - x \cos. \omega}$, ponatur $x = 1$, prodit ut ante vidimus $\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$, qui valor cum sit dimidius eius quem casu praecedente habuimus, statim patet, valorem nostrum fore $\frac{\pi}{2k} \operatorname{tang.} \frac{n\pi}{2k}$, unde nascitur istud

Theorema.

§. 39. *Ista formula integralis: $\int \frac{x^k - n - x^{k+n}}{1 - x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x}$,*

a termino $x = 0$ usque ad terminum $x = 1$ extensa, producet hunc valorem: $\frac{\pi}{2k} \operatorname{tang.} \frac{n\pi}{2k}$.

Corollarium.

§. 40. Hinc si eiusdem formulae integrale a termino $x = 1$ usque ad $x = \infty$ extendatur, eius valor quoque erit $\frac{\pi}{2k} \operatorname{tang.} \frac{n\pi}{2k}$, quandoquidem hi duo valores iunctim sumti valorem casus praecedentis producere debent.

Problema particulare III.

§. 41. Si sumatur $Q = 1 + 2x^k \cos. \eta + x^{2k}$, in-

uesti-

investigare integrale huius formulae differentialis:

$$\frac{P dx}{x(1 + 2x^k \cos \eta + x^{2k})},$$

ubi quidem $\frac{P}{x}$ sit functio integra, in qua nullae potestates altiores occurrant quam exponentis $2k$.

Solutio.

Quia denominator Q alios factores simplices, praeter imaginarios, non admittit, nisi casu quo $\eta = 180^\circ$, sit eius factor trinomialis in genere $1 - 2x \cos \omega + x^2$, quo posito $= 0$ fiet

$$Q = \frac{x - \cos \omega}{\sin \omega} (\sin 2k\omega + 2 \cos \eta \sin k\omega + \cos 2k\omega + 2 \cos \eta \cos k\omega + 1),$$

quae forma, quia debet esse nihilo aequalis, postulat has duas condiciones:

- I. $\sin 2k\omega + 2 \cos \eta \sin k\omega = 0$ et
- II. $\cos 2k\omega + 2 \cos \eta \cos k\omega + 1 = 0$.

Cum igitur fit

$\sin 2k\omega = 2 \sin k\omega \cos k\omega$ et $\cos 2k\omega + 1 = 2 \cos^2 k\omega$,
prior conditio dat

$$2 \sin k\omega (\cos k\omega + \cos \eta) = 0,$$

et secunda conditio

$$2 \cos k\omega (\cos k\omega + \cos \eta) = 0;$$

utrique igitur conditioni satisfat simul, si fuerit

$$\cos k\omega + \cos \eta = 0,$$

quod quo facilius fieri possit sumamus $\eta = \pi - \theta$, ut habeatur $\cos k\omega = \cos \theta$. Omnes autem anguli cum η co-

munem cosinum habentes sunt: θ , $2\pi + \theta$, $4\pi + \theta$, $6\pi + \theta$,
et in genere $2i\pi + \theta$, quamobrem statuamus pro ω se-
quentes valores:

$$\omega = \frac{\theta}{k}, \omega = \frac{2\pi + \theta}{k}, \omega = \frac{4\pi + \theta}{k}, \text{ etc.}$$

et in genere $\omega = \frac{2i\pi + \theta}{k}$, quorum valorum numerus cum
debeat esse $= k$, ultimus erit

$$\omega = \frac{2(k-1)\pi + \theta}{k}, \text{ siue } \omega = \frac{-2\pi + \theta}{k}.$$

His constitutis consideremus formulam $\frac{x^d Q}{d x}$, quae erit
 $= 2k(x^k \cos. \eta + x^{2k})$,

quae per conditionem

$$x x - 2x \cos. \omega + 1 = 0, \text{ ob } \cos. \eta = -\cos. \theta,$$

reducitur ad hanc formam:

$$2k \frac{(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} (\sin. 2k\omega - \cos. \theta \sin. k\omega) \\ + 2k (\cos. 2k\omega - \cos. \theta \cos. k\omega),$$

pro qua in genere sumimus

$$= \frac{f(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} + g, \text{ sicque erit}$$

$$f = 2k (\sin. 2k\omega - \cos. \theta \sin. k\omega) \text{ et}$$

$$g = 2k (\cos. 2k\omega - \cos. \theta \cos. k\omega).$$

Loco $\sin. 2k\omega$ et $\cos. 2k\omega$ scribamus valores ante indi-
catos, prodibitque

$$f = 2k \sin. k\omega (2 \cos. k\omega - \cos. \theta) \text{ et}$$

$$g = 2k (2 \cos. k\omega^2 - 1 - \cos. \theta \cos. k\omega),$$

cum autem esse debeat $\cos. k\omega = \cos. \theta$, fiet

$$f = 2k \sin. k\omega \cos. \theta = k \sin. 2k\omega \text{ et}$$

$$g = 2k (\cos. \theta^2 - 1) = -2k \sin. \theta^2.$$

Quia

Quia igitur in genere est $\omega = \frac{2i\pi + \theta}{k}$, erit

$$2k\omega = 4i\pi + 2\theta = 2\theta,$$

ita vt iam habeamus $f = k \sin. 2\theta = 2k \sin. \theta \cos. \theta$, ita vt sit $ff + gg = 4kk \sin. \theta^2$, quocirca si, posito

$$1 - 2x \cos. \omega + xx = 0,$$

functio P transformetur in hanc formam: $\frac{F(x - \cos. \omega)}{\sin. \omega} + G$, ex denominatoris Q factore $1 - 2x \cos. \omega + xx$ oriatur ista pars integralis:

$$\frac{F \cos. \theta - G \sin. \theta}{k \sin. \theta} \int V(x x - 2x \cos. \omega + 1) + \frac{G \cos. \theta + F \sin. \theta}{k \sin. \theta} A \operatorname{tang.} \frac{x \sin. \omega}{1 - x \cos. \omega}.$$

Tantum igitur superest vt loco ω ordine substituantur omnes eius valores, qui sunt: $\frac{\theta}{k}, \frac{2\pi + \theta}{k}, \frac{4\pi + \theta}{k}, \dots, \frac{2(k-1)\pi + \theta}{k}$, et summa omnium harum formularum praebebit totum integrale quaesitum.

Corollarium.

§. 42. Si fuerit numerator P simplex potestas ipsius x , scilicet $P = x^m$, tum fiet $F = \sin. m\omega$ et $G = \cos. m\omega$, vnde pars integralis ex denominatoris factore indefinito:

$$1 - 2x \cos. \omega + xx, \text{ oriunda erit}$$

$$\frac{\cos. \theta \sin. m\omega - \sin. \theta \cos. m\omega}{k \sin. \theta} \int V(x x - 2x \cos. \omega + 1) + \frac{\cos. \theta \cos. m\omega + \sin. \theta \sin. m\omega}{k \sin. \theta} A \operatorname{tang.} \frac{x \sin. \omega}{1 - x \cos. \omega},$$

vnde simul patet, si functio P ex pluribus huiusmodi potestatibus fuerit composita, quemadmodum integrationem absolui oporteat.

Problema speciale.

§. 43. Proposita formula differentiali $\frac{x^{k-n} + x^{k+n}}{1 + 2x^k \cos. \eta + x^{2k}} dx$ eius totum integrale inuestigare.

Solu-

Solutio.

Cum hic sit $P = x^{k-n} + x^{k+n}$, erit
 $F = 2 \sin. k \omega \cos. n \omega$ et $G = 2 \cos. k \omega \cos. n \omega$,
 ubi $\cos. k \omega = \cos. \theta$, quibus valoribus substitutis pro parte
 integralis logarithmica erit:

$$\frac{F \cos. \theta - G \sin. \theta}{k \sin. \theta} = \frac{2 \cos. \theta \cos. n \omega (\sin. k \omega - \sin. \theta)}{k \sin. \theta}$$

Cum autem in genere sit $\omega = \frac{2i\pi + \theta}{k}$, erit $\sin. k\omega = \sin. \theta$, vnde
 patet, hanc formulam evanescere, ita vt omnes partes lo-
 garithmicæ ex integrali excedant. Pro partibus autem
 circularibus euadet coefficientis $\frac{G \cos. \theta + F \sin. \theta}{k \sin. \theta} = \frac{2 \cos. n \omega}{k \sin. \theta}$, sic-
 que ex factore denominatoris indefinito $1 - 2x \cos. \omega + x^2$
 oritur ista pars integralis:

$$\frac{2 \cos. n \omega}{k \sin. \theta} A \text{ tang. } \frac{x \sin. \omega}{1 - x \cos. \omega}.$$

In hac ergo formula pro ω ordine scribamus eius valores,
 qui sunt $\frac{\theta}{k}$, $\frac{2\pi + \theta}{k}$, $\frac{4\pi + \theta}{k}$ etc. vsque ad $\frac{2(k-1)\pi + \theta}{k}$; ubi
 meminisse oportet esse $\theta = \pi - \eta$, et quo formulæ non
 nimis fiant perplexæ vtamur sequentibus valoribus:

$$\frac{2\pi}{k} = \alpha, \frac{\theta}{k} = \beta, \frac{2\pi}{k} = \gamma, \text{ et } \frac{n\pi}{k} = \delta,$$

vt valores ipsius ω fiant

$$\beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta, 3\alpha + \beta, \dots (k-1)\alpha + \beta.$$

At vero omnes valores anguli $n\omega$ erunt ordine

$$\delta, \gamma + \delta, 2\gamma + \delta, 3\gamma + \delta, \dots (k-1)\gamma + \delta.$$

His igitur valoribus adhibitis totum integrale quod quæ-
 rimus erit

$$\begin{aligned} & \frac{2 \cos. \delta}{k \sin. \theta} A \text{ tang. } \frac{x \sin. \beta}{1 - x \cos. \beta} + \frac{2 \cos. (\gamma + \delta)}{k \sin. \theta} A \text{ tang. } \frac{x \sin. (\alpha + \beta)}{1 - x \cos. (\alpha + \beta)} \\ & + \frac{2 \cos. (2\gamma + \delta)}{k \sin. \theta} A \text{ tang. } \frac{x \sin. (2\alpha + \beta)}{1 - x \cos. (2\alpha + \beta)} + \frac{2 \cos. (3\gamma + \delta)}{k \sin. \theta} A \text{ tang. } \frac{x \sin. (3\alpha + \beta)}{1 - x \cos. (3\alpha + \beta)} \\ & + \dots + \frac{2 \cos. (k-1)\gamma + \delta}{k \sin. \theta} A \text{ tang. } \frac{x \sin. (k-1)\alpha + \beta}{1 - x \cos. (k-1)\alpha + \beta} \end{aligned}$$

Corol.

Corollarium 1.

§. 44. Evoluamus casum quo $n = 0$, ideoque etiam $\gamma = 0$ et $\delta = 0$, et quia hoc casu formula integralis evadet $2 \int \frac{x^{k-1} dx}{1 + 2x^k \cos. \eta + x^{2k}}$, pro ea statuamus $x^k = z$, atque ob $x^{k-1} = \frac{dz}{k}$, habebitur $\frac{2}{k} \int \frac{dz}{1 + 2z \cos. \eta + z^2}$, cuius integrale erit:

$$= \frac{2}{k \sin. \eta} A \text{ tang. } \frac{z \sin. \eta}{1 - z \cos. \eta} = \frac{2}{k \sin. \theta} A \text{ tang. } \frac{z \sin. \theta}{1 - z \cos. \theta},$$

unde cum in serie inventa omnes coefficientes arcuum finiant $\frac{2}{k \sin. \theta}$, per hunc coefficientem diuidendo habebimus sequentem aequationem:

$$A \text{ tang. } \frac{x^k \sin. \theta}{1 - x^k \cos. \theta} = A \text{ tang. } \frac{x \sin. \beta}{1 - x \cos. \beta} + A \text{ tg. } \frac{x \sin. (\alpha + \beta)}{1 - x \cos. (\alpha + \beta)} + A \text{ tg. } \frac{x \sin. (2\alpha + \beta)}{1 - x \cos. (2\alpha + \beta)} + A \text{ tg. } \frac{x \sin. ((k-1)\alpha + \beta)}{1 - x \cos. ((k-1)\alpha + \beta)},$$

vbi recordandum est esse $\alpha = \frac{2\pi}{k}$, $\beta = \frac{\theta}{k}$.

Corollarium 2.

§. 45. Ponamus esse $\theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, et aequatio modo inventa hanc induet formam:

$$A \text{ tang. } x = A \text{ tg. } \frac{x \sin. \frac{\pi}{2k}}{1 - x \cos. \frac{\pi}{2k}} + A \text{ tg. } \frac{x \sin. \frac{5\pi}{2k}}{1 - x \cos. \frac{5\pi}{2k}} + A \text{ tg. } \frac{x \sin. \frac{9\pi}{2k}}{1 - x \cos. \frac{9\pi}{2k}} + A \text{ tg. } \frac{x \sin. \frac{13\pi}{2k}}{1 - x \cos. \frac{13\pi}{2k}} + \dots + A \text{ tg. } \frac{x \sin. \frac{(4k-3)\pi}{2k}}{1 - x \cos. \frac{(4k-3)\pi}{2k}}.$$

Sit $k = 1$, eritque $A \text{ tang. } x = A \text{ tang. } x$.

Sit $k = 2$, eritque $A \text{ tang. } x = A \text{ tang. } \frac{x}{\sqrt{2-x}} + A \text{ tag. } \frac{-x}{\sqrt{2+x}} = A \text{ tang. } \frac{x}{\sqrt{2-x}} - A \text{ tang. } \frac{x}{\sqrt{2+x}}.$

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. V. P. I.

F

Sit

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) 42 \left(\frac{1}{2} \right)$$

Sit $k=3$, eritque $A \operatorname{tang} x^3 = A \operatorname{tang} \frac{x}{2-x\sqrt{3}} + A \operatorname{tg} \frac{x}{2+x\sqrt{3}} - A \operatorname{tg} x$
etc. etc.

Haec igitur series ab ea quam supra §. 20. inuenimus, prorsus discrepat, etiamsi vtriusque valor sit idem, scil. $A \operatorname{tang} x^k$.

Quaestio prior.

§. 46. *Proposita formula differentiali*

$$\frac{x^{k-n} + x^{k+n} \frac{dx}{x}}{1+x^k \operatorname{cof} \gamma + x^{2k} \frac{dx}{x}}$$

eius integralis valorem inuestigare, qui oritur si post integrationem ponatur $x=1$.

Solutio.

Cum posito $x=\infty$ in genere fit

$$A \operatorname{tang} \frac{x \operatorname{fin} \omega}{1-x \operatorname{cof} \omega} = \pi - \omega,$$

valor integralis quem quaerimus hac serie exprimetur:

$$\frac{2 \operatorname{cof} \delta}{k \operatorname{fin} \theta} (\pi - \beta) + \frac{2 \operatorname{cof} (\gamma + \delta)}{k \operatorname{fin} \theta} (\pi - \alpha - \beta) + \frac{2 \operatorname{cof} (2\gamma + \delta)}{k \operatorname{fin} \theta} (\pi - 2\alpha - \beta) \\ + \frac{2 \operatorname{cof} (3\gamma + \delta)}{k \operatorname{fin} \theta} (\pi - 3\alpha - \beta) \dots + \frac{2 \operatorname{cof} ((k-1)\gamma + \delta)}{k \operatorname{fin} \theta} (\pi - (k-1)\alpha - \beta)$$

Statuamus igitur

$$S = (\pi - \beta) \operatorname{cof} \delta + (\pi - \alpha - \beta) \operatorname{cof} (\gamma + \delta) + (\pi - 2\alpha - \beta) \operatorname{cof} (2\gamma + \delta) \\ \dots + (\pi - (k-1)\alpha - \beta) \operatorname{cof} ((k-1)\gamma + \delta),$$

vt fit valor quaesitus $\frac{2S}{k \operatorname{fin} \theta}$. Multiplicemus vtrinque per $2 \operatorname{fin} \frac{1}{2} \gamma$, et cum fit

$$2 \operatorname{fin} \frac{1}{2} \gamma \operatorname{cof} q = \operatorname{fin} (\frac{1}{2} \gamma + q) - \operatorname{fin} (q - \frac{1}{2} \gamma),$$

hac reductione adhibita fiet;

$$2 S \sin. \frac{1}{2} \gamma = \left\{ \begin{aligned} & -(\pi - \beta) \sin. (\delta - \frac{1}{2} \gamma) + (\pi - \beta) \sin. (\frac{1}{2} \gamma + \delta) \\ & - (\pi - \alpha - \beta) \sin. (\frac{1}{2} \gamma + \delta) \\ & + (\pi - \alpha - \beta) \sin. (\frac{3}{2} \gamma + \delta) + (\pi - 2\alpha - \beta) \sin. (\frac{5}{2} \gamma + \delta) \\ & - (\pi - 2\alpha - \beta) \sin. (\frac{7}{2} \gamma + \delta) + (\pi - 3\alpha - \beta) \sin. (\frac{9}{2} \gamma + \delta) \end{aligned} \right\} \text{etc.}$$

quae series contractis terminis similibus transit in hanc:

$$2 S \sin. \frac{1}{2} \gamma = -(\pi - \beta) \sin. (\delta - \frac{1}{2} \gamma) + \alpha \sin. (\frac{1}{2} \gamma - \delta) \\ + \alpha \sin. (\frac{3}{2} \gamma + \delta) + \alpha \sin. (\frac{5}{2} \gamma + \delta) \\ + \dots + \alpha \sin. (\frac{(2k-3)}{2} \gamma + \delta) \\ + (\pi - (k-1)\alpha - \beta) \sin. (\frac{(2k-1)}{2} \gamma + \delta),$$

vbi cum fit $\alpha = \frac{2\pi}{k}$ et $\beta = \frac{\theta}{k}$, erit

$$\pi - (k-1)\alpha - \beta = \alpha - \pi - \beta.$$

Ponatur

$$T = \sin. (\frac{1}{2} \gamma + \delta) + \sin. (\frac{3}{2} \gamma + \delta) + \sin. (\frac{5}{2} \gamma + \delta) \\ + \sin. (\frac{7}{2} \gamma + \delta) + \dots + \sin. ((k-\frac{1}{2}) \gamma + \delta),$$

vt nanciscamur:

$$2 S \sin. \frac{1}{2} \gamma = -(\pi - \beta) \sin. (\delta - \frac{1}{2} \gamma) \\ - (\pi + \beta) \sin. ((k - \frac{1}{2}) \gamma + \delta) + \alpha T,$$

quae expressio ob $k\gamma = 2n\pi$ reducitur ad $-2\pi \sin. (\delta - \frac{1}{2} \gamma) + \alpha T$.

Nunc igitur ad quantitatem T inueniendam multiplicemus vtrinque per $2 \sin. \frac{1}{2} \gamma$, et cum in genere fit:

$$2 \sin. \frac{1}{2} \gamma \sin. q = \cos. (q - \frac{1}{2} \gamma) - \cos. (q + \frac{1}{2} \gamma),$$

obtinebimus:

$$2 T \sin. \frac{1}{2} \gamma = \left\{ \begin{aligned} & \cos. \delta - \cos. (\gamma + \delta) - \cos. (2\gamma + \delta) - \cos. (3\gamma + \delta) \\ & + \cos. (\gamma + \delta) + \cos. (2\gamma + \delta) + \cos. (3\gamma + \delta) \\ & - \cos. (4\gamma + \delta) \dots - \cos. (k\gamma + \delta) \\ & + \cos. (4\gamma + \delta) \dots \end{aligned} \right\}$$

F 2

quae

quae forma contrahitur in istam:

$$2 T \sin. \frac{1}{2} \gamma = \cos. \delta - \cos. (\gamma k + \delta).$$

Cum autem sit $\gamma = \frac{2n\pi}{k}$, erit $k\gamma = 2n\pi$, ideoque

$$\cos. (k\gamma + \delta) = \cos. \delta, \text{ unde fit}$$

$$2 T \sin. \frac{1}{2} \gamma = 0, \text{ ita ut nunc sit}$$

$$2 S \sin. \frac{1}{2} \gamma = 2 \pi \sin. (\frac{1}{2} \gamma - \delta), \text{ ideoque,}$$

$$S = \frac{\pi \sin. (\frac{1}{2} \gamma - \delta)}{\sin. \frac{1}{2} \gamma}.$$

Est vero $\frac{1}{2} \gamma = \frac{n\pi}{k}$ et $\delta = \frac{n\theta}{k}$, ideoque

$$\frac{1}{2} \gamma - \delta = \frac{n(\pi - \theta)}{k} = \frac{n\eta}{k}, \text{ ob } \theta = \pi - \eta,$$

hocque modo habebimus $S = \frac{\pi \sin. \frac{n\eta}{k}}{\sin. \frac{n\pi}{k}}$, consequenter valor

integralis quaesiti concluditur fore

$$\frac{2 \pi \sin. \frac{n\eta}{k}}{k \sin. \theta \sin. \frac{n\pi}{k}} = \frac{2 \pi \sin. \frac{n\eta}{k}}{k \sin. \eta \sin. \frac{n\pi}{k}},$$

unde formetur sequens Theorema.

Theorema I.

§. 47. Haec formula integralis:

$$\int \frac{x^{k-n} + x^{k+n}}{1 + 2x^k \cos. \eta + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x},$$

a termino $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensa, producit hunc

valorem: $\frac{2 \pi \sin. \frac{n\eta}{k}}{k \sin. \eta \sin. \frac{n\pi}{k}}$. Cui adiungatur adhuc sequens.

Theo-

Theorema 2.

§. 48. Ista vero formula integralis:

$$\int \frac{x^{k-1} \eta^{-1} dx}{1 + 2x^k \cos. \eta + x^{2k}}$$

pariter a termino $x=0$ usque ad terminum $x=\infty$ extensa, valorem habet dimidium praecedentis, qui ergo erit

$$\frac{\pi \sin. \frac{\eta}{k}}{k \sin. \eta \sin. \frac{\eta \pi}{k}}$$

cuius demonstratio perinde succedet ac supra §. 25.

Quaestio altera.

§. 49. Proposita formula differentiali:

$$\int \frac{x^{k-n} + x^{k+n}}{1 + 2x^k \cos. \eta + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x},$$

eius integralis valorem investigare, qui oritur si post integrationem ponitur $x=1$.

Solutio.

Posito $x=r$ formula generalis $A \tan. \frac{x \sin. \omega}{r - x \cos. \omega}$, vt supra vidimus, reducitur ad $\frac{\pi - \omega}{2}$; vnde patet, singulas partes integralis duplo minores esse quam casu praecedente, vnde valor quaesitus etiam erit duplo minor

$$= \frac{\pi \sin. \frac{\eta}{k}}{k \sin. \eta \sin. \frac{\eta \pi}{k}}, \text{ vnde nascitur sequens}$$

Theorema.

§. 50. Ista formula integralis:

$$\int \frac{x^{k-n} + x^{k+n}}{1 + 2x^k \cos \eta + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x},$$

a termino $x=0$ usque ad $x=1$ extensa, producet hunc

$$\text{valorem: } \frac{\pi \sin \frac{n\eta}{k}}{k \sin \eta \sin \frac{n\pi}{k}}.$$

Scholion.

§. 51. In his valoribus integralibus ii casus prae-
cipue sunt notatu digni, quibus post integrationem statui-
tur $x=1$, quandoquidem tum ista integralia commode
per seriem infinitam exprimere licet. Ita pro casu §. 26,
quoniam est

$$\frac{1}{1+x^{2k}} = 1 - x^{2k} + x^{4k} - x^{6k} + \text{etc.}$$

si hanc seriem multiplicemus per $(x^{k-n} + x^{k+n}) \frac{dx}{x}$, et
integremus, tum vero ponamus $x=1$, prodibit ista series
infinita:

$$\frac{1}{k-n} - \frac{1}{3k-n} + \frac{1}{5k-n} - \frac{1}{7k-n} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{k+n} - \frac{1}{3k+n} + \frac{1}{5k+n} - \frac{1}{7k+n} + \text{etc.}$$

cuius ergo seriei in infinitum continuatae summa est

$$\frac{\pi}{2k \cos \frac{n\pi}{2k}}. \text{ At pro casu §. 38. ob}$$

$$\frac{1}{1-x^{2k}} = 1 + x^{2k} + x^{4k} + x^{6k} + \text{etc.}$$

eodem modo operando pervenitur ad hanc seriem:

$$\frac{1}{k-n} + \frac{1}{3k-n} + \frac{1}{5k-n} + \frac{1}{7k-n} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{k+n} + \frac{1}{3k+n} + \frac{1}{5k+n} + \frac{1}{7k+n} + \text{etc.}$$

cuius

cuius ergo summa erit $\frac{\pi}{2k} \text{tang. } \frac{n\pi}{2k}$. Denique pro casu, quem extremo loco tractauimus, cum sit vt alibi ostendimus:

$$\frac{\sin. \eta}{1 + 2x^k \cos. \eta + x^{2k}} = \sin. \eta - x^k \sin. 2\eta + x^{2k} \sin. 3\eta - \text{etc.}$$

haec series ducta in $(x^k - n + x^{k+n}) \frac{dx}{x}$ et integrata, sumendo $x = 1$, producet hanc seriem:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin. \eta}{k-n} - \frac{\sin. 2\eta}{2k-n} + \frac{\sin. 3\eta}{3k-n} - \frac{\sin. 4\eta}{4k-n} + \text{etc.} \\ & + \frac{\sin. \eta}{k+n} - \frac{\sin. 2\eta}{2k+n} + \frac{\sin. 3\eta}{3k+n} - \frac{\sin. 4\eta}{4k+n} + \text{etc.} \end{aligned}$$

cuius ergo valor aequabitur illi quem inuenimus valori ducto in $\sin. \eta$, ita vt summa huius seriei sit $= \frac{\pi \sin. \frac{n\eta}{k}}{k \sin. \frac{n\pi}{k}}$,

quae series eo magis sunt memorabiles, quod alio modo earum summa vix elici potest.